• Θεωρήματα Διατήρησης

- Διατήρηση της ορμής:

Αν σε υλικό σημείο η συνολική επιδρούσα δύναμη είναι μηδενική, η ορμή του διατηρείται.
Είναι:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \xrightarrow{\vec{F}=\vec{0}} \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{P}(t) \text{ σταθερό διάνυσμα.}$$

- Διατήρηση της στροφορμής:

Ορίζουμε το διάνυσμα στροφορμής ως:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} = \vec{r} \times (m\vec{v}) = m(\vec{r} \times \vec{v}) = m(\vec{r} \times \vec{r}')$$

, $\vec{r}$ το διάνυσμα θέσης.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m\left(\cancelto{\vec{0}}{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d\vec{r}}{dt}} + \vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt} \right) = m(\vec{r} \times \vec{\alpha})$$

$$= \vec{r} \times m\vec{\alpha} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (1)$$

Ορίζουμε $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$, τη ροπή της δύναμης $\vec{F}$ (2)

Από (1), (2), αν η συνολική επιδρούσα ροπή είναι μηδενική, η στροφορμή διατηρείται.
Ισοδύναμα, αν $\vec{r}$, $\vec{F}$ συγγραμμικά.

Φυσική σημασία στροφορμής:
Χαρακτηρίζει περιστρεφόμενα σώματα και συνήθως καλείται γωνιακή ορμή. Μετρά την αδράνεια ως προς την κίνηση σώματος περί άξονα, με διεύθυνση να συμπίπτει με τον άξονα περιστροφής του σώματος.

(Η ιδέα της κβαντομηχανικής ξεκίνησε από τη λεγόμενη κβάντωση της στροφορμής)

- Διατήρηση Ενέργειας

$$W = \int_A^B \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_A^B \bar{F} \cdot \vec{v}\, dt = \int_A^B m \frac{d\bar{v}}{dt} \cdot \bar{v}\, dt = \int_A^B m\, \bar{v} \cdot d\bar{v}$$

$$= m \int_A^B (V_x, V_y, V_z) \cdot (dV_x, dV_y, dV_z)$$

$$= m \int_A^B V_x\, dV_x + V_y\, dV_y + V_z\, dV_z$$

$$= m \left[\frac{1}{2} V_x^2 + \frac{1}{2} V_y^2 + \frac{1}{2} V_z^2 \right]_A^B$$

Ορίζω $T = \frac{1}{2} m (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) = \frac{1}{2} m |\bar{v}|^2$ την κινητική ενέργεια

Τότε:

$$W = T(B) - T(A)$$

Θεωρώ διατηρητικό πεδίο δυνάμεων, δηλαδή $\bar{F} = \nabla f$

Τότε

$$W = \int_A^B \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_A^B \nabla f\, d\bar{r} = f(B) - f(A),$$

δηλαδή $f(B) - f(A) = T(B) - T(A)$.

Ορίζω μια συνάρτηση $f = -V$ και τελικά

$$-V(B) + V(A) = T(B) - T(A) \Longleftrightarrow$$

$$T(A) + V(A) = T(B) + V(B).$$

Η συνολική ενέργεια ενός συντηρητικού πεδίου διατηρείται

Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Παραδ. Ομογενές πεδίο βαρύτητας: $\bar{F} = -mg\hat{k}$

1. $\nabla \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & 0 & -mg \end{vmatrix} = \bar{0}$

2. $\bar{F} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) = -mg\hat{k}$

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial z} = mg \Rightarrow V = \int_{z_0}^{z} mg\,dz = mg(z - z_0) \end{cases}$$

- Ευθύγραμμη κίνηση:

$\bar{F} = (f(x), 0, 0)$

1. $\nabla \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ f(x) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \bar{0}$

- Πεδία κεντρικών δυνάμεων

(Κεντρικές καλούνται οι δυνάμεις για τις οποίες $\bar{F} = f(r)\hat{r}$ όπου $\hat{r}$ το μοναδιαίο διάνυσμα σε πολικές συν/νες, $\hat{r} = \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|}$.

Άσκηση: Να δειχθεί ότι οι κεντρικές δυνάμεις είναι διατηρητικές δυνάμεις.

Σύνδεση με τους νόμους του Newton

Ολοκληρώματα κίνησης:

Έχουμε αποδείξει ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης ενός υλικού σημείου κάποιες ποσότητες και κάτω από συγκεκριμένες προϋποθέσεις, διατηρούνται. Το ζητούμενο είναι να δείξουμε τη συνέπεια μεταξύ των ορισμών και του νόμου του Newton, δηλαδή ζητάμε μια ενιαία θεώρηση της μηχανικής

Ο νόμος του Newton σε καρτεσιανές συν/νες:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \\ m\ddot{z} = F_z \end{cases}, \quad \bar{x} = (x, y, z), \quad \bar{F} = (F_x, F_y, F_z), \quad P_x = m\dot{x}, \quad P_y = m\dot{y}, \quad P_z = m\dot{z}$$

Για τη στροφορμή: $L_x = m(y\dot{z} - \dot{y}z)$, $L_y = m(z\dot{x} - \dot{z}x)$, $L_z = m(x\dot{y} - y\dot{x})$

Ενέργεια: $E = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V(x, y, z)$

Έστω η δύναμη $\bar{F} = f(x)\hat{\imath} = -\nabla V \hat{\imath} = -\frac{dV}{dx}\hat{\imath}$

$$\bar{F} = m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx} \Longrightarrow -\frac{dV}{dx} = m\ddot{x} \Longrightarrow -\frac{dV}{dx}\dot{x} = m\ddot{x}\dot{x}$$

$$\Longrightarrow -\frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt} = m\ddot{x}\dot{x} \Longrightarrow -\frac{dV}{dt} = m\ddot{x}\dot{x}$$

$$\Longrightarrow \int_A^B \frac{dV}{dt}\, dt = m\int_A^B \ddot{x}\dot{x}\, dt = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \Big|_A^B$$

$$\Longrightarrow -(V(B) - V(A)) = T(B) - T(A) \Longrightarrow T(A) + V(A) = T(B) + V(B)$$

Αντιστρόφως:

$$\frac{1}{2} m\dot{x}^2 = -V(x) \Longrightarrow \frac{1}{\cancel{2}} m \dot{x}\ddot{x}\cancel{2} = -\frac{dV}{dt} = -\frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt}$$

$$= -\frac{dV}{dx}\dot{x} \Longrightarrow m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx} = F(x)$$

Αναλλοίωτες ποσότητες:

Ο νόμος του Newton στη γενική του μορφή είναι μια εξίσωση 2ου βαθμού ως προς το χρόνο, δηλαδή

$\bar{F} = m\ddot{x} = m\dfrac{d^2\bar{x}}{dt^2}$. Ο μετασχηματισμός $\tau = -t$,

αφήνει την εξίσωση αναλλοίωτη, δηλαδή

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{d\bar{x}}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = -\frac{d\bar{x}}{d\tau}$$

$\dfrac{d^2\bar{x}}{dt^2} = \dfrac{d^2\bar{x}}{d\tau^2}$, δηλαδή ο νόμος του Newton είναι αναλλοίωτος στην αντιστροφή του χρόνου.

Δηλαδή μπορεί εξίσου καλά να περιγράψει τόσο την εξέλιξη ενός συστήματος όσο και το παρελθόν του.

Με τον ίδιο τρόπο μπορεί να αποδείξει κανείς το αναλλοίωτο προς το μετασχηματισμό $\tau = t + t_0$ κι ανακαλύπτει την ομογένεια του χρόνου.

Το αναλλοίωτο ενός φυσικού νόμου κάτω από μετασχηματισμό καλείται συμμετρία.

(Μετασχηματισμός Γαλιλαίου).

$$x \rightarrow x' = x - ct$$
$$t \rightarrow t' = t$$